



TITLE:

# 一人ゲームHi-Qについて(計算アルゴリズムと計算量の基礎理論)

AUTHOR(S):

上原, 隆平; 岩田, 茂樹

---

CITATION:

上原, 隆平 ...[et al]. 一人ゲームHi-Qについて(計算アルゴリズムと計算量の基礎理論). 数理解析研究所講究録 1989, 695: 205-214

ISSUE DATE:

1989-06

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/101388>

RIGHT:

# 一人ゲーム $H_i - Q$ について

電通大 上原 隆平 (Ryuhei Uehara)

東海大 岩田 茂樹 (Shigeki Iwata)

本稿では、 $H_i - Q$  という一人ゲームをとりあげる。このゲームについての2つの結果を示す。まずはじめに、実際の  $H_i - Q$  に関して、解を得るための効率的な解析法を示す。次に  $H_i - Q$  を一般化したものについて考える。一般化された  $H_i - Q$  が解をもつかどうかを判定する問題は、NP 完全であることを示す。

## 1 はじめに

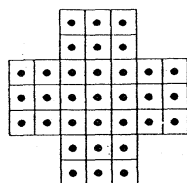
実際のゲームとしての  $H_i - Q$  とは、次のような一人ゲームである。

<図 1. 1> のような 33 個のマス目をもった盤面の上に、33 個のトークンが置いてある。まず、ここから任意のトークンを一つ取り去る。そして<図 1. 2>にあるような規則にしたがって、盤面からトークンを取り除いていく。すなわち、あるトークン  $p$  に注目したとき、 $p$  の両隣もしくは上下いずれかにトークン  $q$  があり、さらにその先にはトークンがないとき、 $p$  は  $q$  を飛び越えることができ、その結果、トークン  $q$  は盤面上から取り除かれる。この時、 $p$  は盤面から外に飛び出すことや、斜めに飛び越えることはできない。

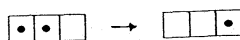
このようにしてトークンを次々に盤面上から取り除いて行き、最終的に初めにトークンを取り去ったマス目にトークンを一つだけ残すことができればゲームは成功して終わる。盤面上に取り除くことのできないトークンが二つ以上、あるいは初めに取り去ったマス目以外にトークンが1つ残ってしまった時にはゲームは失敗して終わる。

本稿では、まず始めに、この  $H_i - Q$  が実際のコンピュータの上で非常に効率よく解を求めることができることを示す。これには、最小コスト探索と呼ばれる方法を用いる。これは、詳しくは後述するが、ゲーム木全体のうち、解により近いと思われる部分から先に探索していく方法である。この最小コスト探索を用いる時に非常に効果的な2つの結果を示す。

次に、一般化された  $H_i - Q$  が成功するかどうかを判定する問題についての結果を示す。この判定問題はNP 完全になる。この証明は、ある制限されたハミルトン閉路の判定問題がこの問題に多項式時間還元可能であることを示すことによって行う。



<図 1. 1> 実際の  $H_i - Q$



<図 1. 2> 変換規則

## 2 準備

[定義]  $H i - Q$ とは、 $H = (X, Y, B, S, \{t\})$ のことを言う。ただし、 $X = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $Y = \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $B \subset X \times Y$ ,  $S \subset B$ ,  $t \in B$ とし、 $X \times Y$ の要素を頂点、 $B$ を盤面と言う。盤面は、トークンを置くことのできる座標の集合を表す。また、 $B$ の部分集合を局面という。局面は、その時にトークンが置かれている頂点の集合を表す。さらに、 $S$ を初期局面と言ひ、 $\{t\}$ を最終局面と言う。すなわち、初めに $S$ の要素の頂点にトークンが置かれていて、最後に頂点 $t$ のみにトークンを残すことがゲームの目的である。

局面上の関係 $\vdash$ を次のように定義する。局面 $P, Q$ について、 $P \vdash Q$ が成立する必要十分条件は、同一直線上の連続した3点 $p_1, p_2, p_3$ に対し、

$$P - Q = \{p_1, p_2\} \quad \text{かつ} \quad Q - P = \{p_3\}$$

が成り立つことである。正確には、上のような3点 $p_1, p_2, p_3$ に対し、次の条件のいずれかが成り立つことである。

$$p_1 = (i, j), \quad p_2 = (i, j+1), \quad p_3 = (i, j+2)$$

$$p_1 = (i, j), \quad p_2 = (i, j-1), \quad p_3 = (i, j-2)$$

$$p_1 = (i, j), \quad p_2 = (i+1, j), \quad p_3 = (i+2, j)$$

$$p_1 = (i, j), \quad p_2 = (i-1, j), \quad p_3 = (i-2, j)$$

また、局面上の関係 $\vdash$ の反射推移閉包を $\vdash^*$ と定め、関係 $\vdash^i$ を次のように定める。

$$\text{すべての局面 } P \text{ に対し、} \quad P \vdash^0 P$$

$$P \vdash^{i+1} Q \Leftrightarrow \text{ある局面 } R \text{ が存在し、} P \vdash^i R \text{ かつ } R \vdash Q$$

あたえられた $H$ が解をもつとは、初期局面 $S$ と最終局面 $\{t\}$ に対し、

$$S \vdash^* \{t\}$$

が成立することである。また、与えられた $H$ が解を持つかどうかを判定する問題を $H i - Q$ の判定問題と言う。ここで明らかに、 $S \vdash^* \{t\}$ ならば、 $S \vdash^{(S|-1)} \{t\}$ が成立することに注意したい。

以降では直感的な理解を容易にするために、与えられた局面 $P$ に対して、 $(x, y) \neq P$ ならこれを箱で、 $(x, y) \in P$ ならこれを中に円のある箱で表すことがある。

## 3 実際の $H i - Q$ について

以下、3では次のような $H i - Q$ 、 $H = (X, Y, B, S, \{t\})$ を扱う。ただし、 $X = Y = \{1, 2, \dots, 7\}$ ,  $B$ は<図1. 1>の通り、 $t$ は $B$ の任意の元、 $S = B - \{t\}$ とする。 $S \vdash^* \{t\}$ ならば $S \vdash^{31} \{t\}$ が成立することに注意する。

### 3. 1 LCSについて

このゲームに対するゲーム木を次のように定める。

- ・各頂点は一つの局面を表現する。
- ・局面 $P, Q$ について、 $P \vdash Q$ なら、 $P$ に対する頂点は $Q$ に対する頂点の親である。
- ・木の根に対応する局面は初期局面とする。

コンピュータを用いてこのゲームの解を得るには、この木の根から、最終局面 $\{t\}$ に

対する頂点への道をみつければよい。しかし、実際にこの木をすべて構成し、探索することは不可能である。したがって、この木のうちで、解に到達すると思われる部分から効率よく木を構成、探索しなければならない。このような方法は [1] で最小コスト探索 (Least-Cost search, LCS と略す) と呼ばれているものである。これについて簡単に以下で述べる。

まず、局面  $P$  に対し、次のような評価関数  $c$  (これをコスト関数と言う) を考える。

$$c(P) = c_1 f(P) + c_2 h(P)$$

ここで、 $c_1, c_2$  は定数係数、 $f$  は木の深さに対する関数、 $h$  は局面  $P$  がどのくらい解に近いを見積る、発見的関数である。このようなコスト関数  $c(P)$  を用いて、LCS は次のように行われる。

現在得られている局面の集合の中から、もっともコスト関数  $c$  の有利な局面をとりだし、そこから遷移可能な局面を計算する。この中に解があれば終了、さもなければ新たな局面をすでに得られた局面の集合に追加して処理を繰り返す。

以下で、このような探索を行うにあたって、有効な2つの結果について示す。まず、ゲーム木の探索は、木全体の半分の深さまででよいことを示す。すなわち、ここでのゲーム木の深さは最大31となるわけであるが、探索はこのうちの半分、つまり深さ16まで行えばよいことを示す。次に今回使用した、局面を評価する発見的関数  $h$  と、その関数の持つ特徴的な性質を示す。

### 3. 2 ゲーム木の探索について

<補題 3. 1> 局面の遷移として解が得られた時、すべての局面のトークンの有無を反転し、遷移を逆にたどったものもまた解となる。すなわち、 $\hat{P} = B - P$  とし、与えられた解を  $S = P_0 \vdash P_1 \vdash \dots \vdash P_{30} \vdash P_{31} = \{t\}$  としたとき、 $S = \hat{P}_{31} \vdash \hat{P}_{30} \vdash \dots \vdash \hat{P}_1 \vdash \hat{P}_0 = \{t\}$  が成立する。

(証明) これは  $\hat{S} = \{t\}$ ,  $\hat{\{t\}} = S$  が成立することと、規則の適用前のパターンと適用後のパターンが反転によって互いに一致することから明らか。 ■

<定理 3. 1> 任意の解は深さ16までのゲーム木の中から構成することができる。

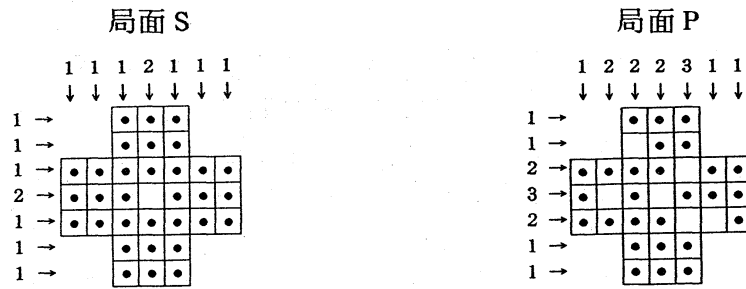
(証明) 解  $S = P_0 \vdash P_1 \vdash \dots \vdash P_{30} \vdash P_{31} = \{t\}$  が与えられたとする。このとき、<補題 3. 1> より、次のような遷移が存在する。

$$S = Q_0 \vdash Q_1 \vdash Q_2 \vdash \dots \vdash Q_{30} \vdash Q_{31} = \{t\}, \quad \hat{Q}_i = P_{31-i}$$

したがって  $P_0$  から  $P_{16}$  までの局面と  $Q_{15} (= \hat{P}_{16})$  から  $Q_0$  の局面をすべて反転したものをあわせた遷移、すなわち、

$$S = P_0 \vdash P_1 \vdash \dots \vdash P_{16} = \hat{Q}_{15} \vdash \hat{Q}_{14} \vdash \dots \vdash \hat{Q}_0 = \{t\}$$

は、はじめに与えられたものと同じ解を与える。 ■



<図3. 1>局面 S, P

### 3. 3 発見的関数

次に、局面を評価する発見的関数について述べる。実際の探索にあたっては局面がどの程度解に近いかを見積らなくてはならない。ゲームを実際に行うと、全体が一つにまとまっている方が有利であり、孤立したトークン群が点在するような局面は解に到達しにくいことがわかる。これは直感的な判断であるが、今回はこれを評価する次のようなコスト関数  $c$  を用いて良好な結果を得た。

まず、連とは、縦または横のトークンの連続した並びを表す。また、連の数とはこの連の個数の総和を表している。与えられた局面  $P$  に対して、 $h(P)$  を局面  $P$  における連の数と定義する。ここで、与えられた局面  $P$  に対してコスト関数  $c$  を、

$$c(P) = f(P) + h(P)$$

と定義する。ただし、 $f(P)$  はゲーム木でのその局面に対する頂点の深さとする。

<例3. 1><図3. 1>のように局面  $S, P$  を考える。ここで、 $S \vdash^5 P$  であることに注意すれば、

$$c(S) = 0 + 16 = 16, \quad c(P) = 5 + 23 = 28$$

となることがわかる。

ここで、関数  $h$  についての興味深い性質を示す。

<定理3. 2>局面  $P, Q$  に対し、 $P \vdash Q$  で、 $P - Q = \{p_1, p_2\}$ ,  $Q - P = \{p_3\}$  とする。各点はこの順に連続しているとする。また、 $p = (x_1, y_1)$ ,  $q = (x_2, y_2)$  としたとき、 $|p - q| = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$  とする。

ここで、局面上の点  $p$  に対する関数  $d(p)$  を、“ $p$  の周囲の4点のうち、トークンの有無が  $p$  と同じものの個数 - 2” と定義する。すなわち、ある局面  $P$  上の点  $p$  に対する関数  $d(p)$  を、

$$p \in P : d(p) = \# \{q \mid |p - q| = 1 \text{ で、かつ } q \in P\} - 2$$

$$p \notin P : d(p) = \# \{q \mid |p - q| = 1 \text{ で、かつ } q \notin P\} - 2$$

と定義する。このとき局面  $P$  上での関数  $d$  について次が成立する。

$$h(Q) - h(P) = \sum_i d(p_i)$$

(証明) ここでは、まず  $d(p)$  が、 $p$  の反転による連の個数の変化に一致すること、

そして、連続した3点に対する $d$ の値が重ね合わせによって変化しないことを示せばよい。前者については12通りの場合について調べればよく、後者については、 $p_1, p_3, p_2$ の順にトークンの有無を反転すると考えれば容易に示すことができる。 ■

以上の結果から、 $P \vdash Q, P - Q = \{p_1, p_2\}, Q - P = \{p_3\}$  に対して、

$$c(Q) = c(P) + \sum_i d(p_i) + 1$$

となる。したがって、局面 $P$ 及び $c(P)$ とから、 $c(Q)$ は非常に速やかに求めることができる。

### 3. 4 実際の解析

これまでに得られた結果から、実際に次のようにして解析を行った。

2つのデータ構造、優先順位つき待ち行列と木構造を用いる。ここで、待ち行列の要素及び木の頂点は局面を表し、はじめはどちらも $S$ のみからなる。

待ち行列の先頭の要素を取り出し、遷移可能な局面を生成する。そして解が得られたかどうかを判定し、得られていればこれを出力し、得られていなければ生成した局面を必要ならば待ち行列および木に加えて処理を繰り返す。

ここで、待ち行列の中では要素は評価関数 $c(P)$ の小さいものから並んでいるようにする。また、解が得られたかどうかは次のように判定する。すなわち、構成した局面の木の中での深さが16だったら、この局面のトークンの有無を反転し、深さ15の局面でこれに一致するものを探索する。一致するものがみつかったら、この局面に到る遷移を木の中を逆にたどれば解を得ることができる。

実際の探索では待ち行列をヒープと呼ばれる構造にしたり、同じ局面や対称な局面を除去したりするが、詳細は省略する。このようにして実際のパーソナルコンピュータで探索を行った結果、はじめに中央の要素を除いた局面に関して、1つめの解を数分で、また十分程度で数十の解を得ることができた。

### 4 一般化された $H_i - Q$ について

一般化された $H_i - Q$ の判定問題はNP完全問題である。この証明を以下で述べる。この問題がNPに属するのは明らかである。したがって、完全性を示せばよい。

[2]により、与えられた次数3の有向平面グラフにハミルトン閉路が存在するかどうかを判定する問題はNP完全である。この問題が $H_i - Q$ の判定問題に多項式時間還元可能であることを示す。ここで、与えられたグラフは、次の条件を満たすとして一般性を失わない。すなわち、すべての頂点は、入次数2で出次数1（これを以下a型の頂点と呼ぶ）であるか、入次数1で出次数2（同b型の頂点と呼ぶ）であるかのどちらかである。また、与えられたグラフはa型の頂点とb型の頂点を少なくとも1つ含むとする。

[構成方法] 与えられたグラフ $G = (V, E)$ から、 $H = (X, Y, B, S, \{t\})$ を次のような順序で構成する。ただし、接点とは<図4. 1>および<図4. 2>で中に点の書いてある箱で表されている座標とし、特に<図4. 1>におけるパターン $\alpha$ 、パターン $\beta$ 上の6個の接点には図のように $t_a, \dots, t_5$ と名前をつける。ただし接

点そのものにはトークンはおかれていない。

S : まず、a型の頂点に対しては<図4. 1>中のパターン $\alpha$ を、b型の頂点に対しては同じくパターン $\beta$ を頂点と同じ位置関係になるように配置する。ここでこのとき各パターンは互いに十分な間隔をあけるようにし、また、任意の2つの接点の座標 $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ に対し、 $x_1 \equiv x_2 \pmod{2}$ ,  $y_1 \equiv y_2 \pmod{2}$ が成立するようにする。これは接点どうしを辺に対するパターンでつなぐときに、ずれないようにするためである。次に各辺に対して、両側の頂点のパターンの対応する接点どうしを<図4. 2>のパターンでつなぐ。このとき、<図4. 1>, <図4. 2>における各接点どうしが重なるようにする。最後にb型の頂点を任意に一つえらび、これに対するパターン $\beta$ の接点 $t_5$ にトークンを置く。各パターン上のトークンと最後においたトークンをSの要素とする。

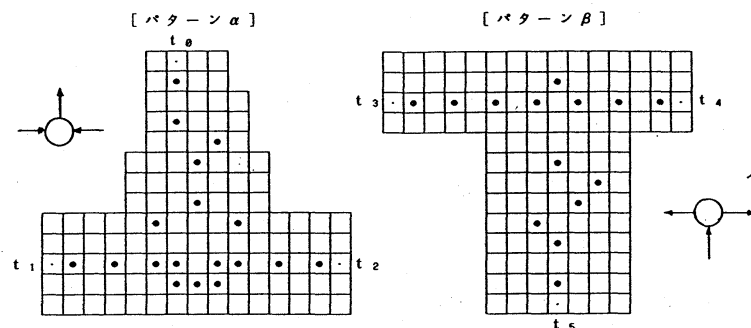
t : Sの構成で最後に選んだ接点 $t_5$ をtとする。

X, Y :  $X = Y = \{1, 2, \dots, n\}$  ただしここでnは、 $S \subset X \times Y$ であるような適当なnとする。(明らかに $n = O(|V|)$ である。)

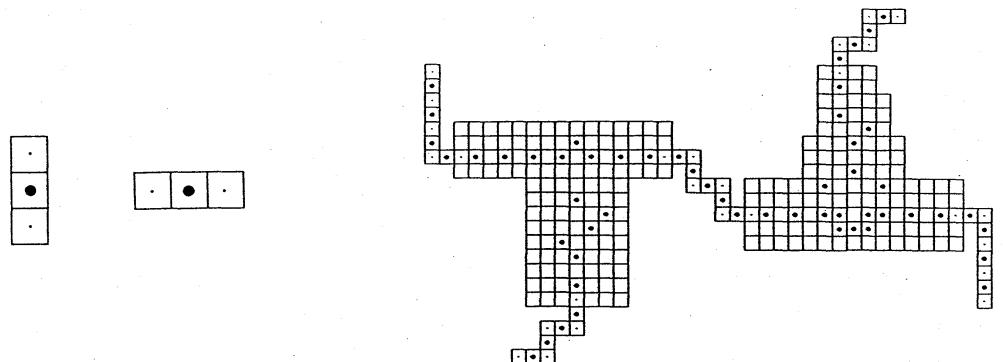
B :  $B = X \times Y$

実際にパターンを辺でつなぐ例を<図4. 3>に示す。この構成が入力の長さの多項式時間で終わることは明らかである。

注意：パターン $\alpha$ での接点 $t_1, t_2$ 、およびパターン $\beta$ での接点 $t_3, t_4$ は機能的に対称である。したがって、以下ではこれらを入れ換えた議論については省略することがある。

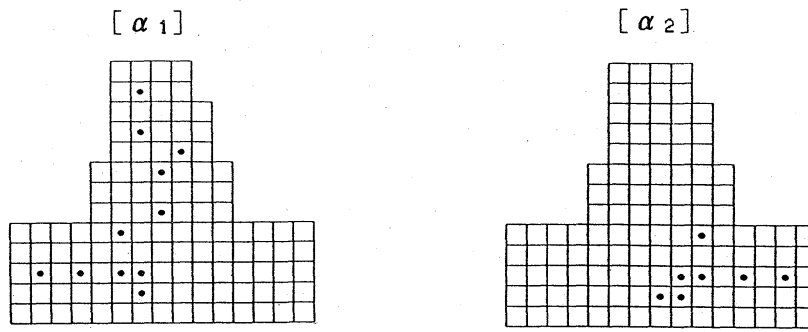
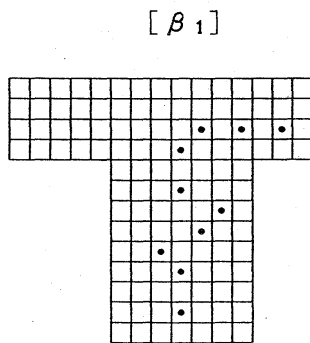
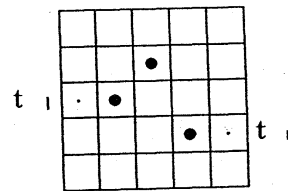


<図4. 1> a型に対するパターン $\alpha$ とb型に対するパターン $\beta$



<図4. 2> 辺に対するパターン

<図4. 3> 構成の例

<図4. 4>  $\alpha_1$ と $\alpha_2$ <図4. 5>  $\beta_1$ 

&lt;図4. 6&gt; 一方通行のパターンE

[定義] ここで、パターン $\alpha$ ,  $\beta$ について、ここから得られるいくつかの局面および遷移に名前をつける。<図4. 4><図4. 5>のように、 $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ であるような $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ 、および $\beta + \{t_3\} \vdash^* \beta_1$ であるような $\beta_1$ を定める。また、これらの局面に対する遷移にそれぞれ次のように $T_1, \dots, T_4$ という名前をつける。

$$T_1: \alpha_2 \vdash^* \{t_2\} \quad T_2: \alpha_1 + \{t_1\} \vdash^* \{t_0\}$$

$$T_3: \beta + \{t_3\} \vdash^* \beta_1 \quad T_4: \beta_1 + \{t_5\} \vdash^* \{t_4\}$$

さらに、ある局面 $P$ がパターン $\alpha$ を含むとする。このとき、 $P$ の中のパターン $\alpha$ が遷移 $T_1$ にしたがって遷移して、新たな局面 $Q$ が得られたとき、これを  $P \vdash^{*T_1} Q$  と書くことにする。 $T_2, T_3, T_4$ に対しても同様に定義する。

また、ある局面 $P$ の上で、 $Q \subset P$ および点 $p_1 \in P$ ,  $p_2 \notin P$ が存在して、 $p_1 \notin Q$ ,  $p_2 \notin Q$ ,  $Q + \{p_1\} \vdash^* \{p_2\}$  が成立するとき、 $P$ の上でこのような遷移を行って、新しい局面 $R$ を得ることを  $P \vdash^{*q} R$  と書くことにする。このとき  $P - Q - \{p_1\} + \{p_2\} = R$  が成立する。またこのような遷移を、パターン $Q$ が $p_1$ によって消去された、と言う。

[定義] 各局面に対して、次のような特別なトークン $\tau$ を考える。すなわち、初期局面 $S$ に対しては、 $\tau = t$ とする。また、局面 $P, Q$ について、 $P \vdash Q$ で、 $P - Q = \{p_1, p_2\}$ ,  $Q - P = \{p_3\}$  とする。このとき、局面 $P$ で $\tau = p_1$ または $\tau = p_2$ のとき、局面 $Q$ では $\tau = p_3$ とする。



<補題 4. 1> 与えられたグラフから構成した  $H_i - Q$  について、次が成立する。すなわち与えられたグラフがハミルトン閉路をもつなら、 $H_i - Q$  は解をもつ。

(証明) ハミルトン閉路を持つグラフに対して構成された  $H_i - Q$  を考える。ここで、まず次のようにして、ハミルトン閉路に使用されない辺の消去を行う。

ハミルトン閉路に使用されない辺を適当に一本選ぶ。この辺の両側の頂点は、この辺を取り除いたとき、明らかに入る辺と出る辺を1つつつ持たなければならない。したがって、閉路に使用されない辺は必ず  $b$  型の頂点から  $a$  型の頂点への辺である。

このとき、この使用されない辺に隣接する  $b$  型の頂点に対するパターン  $\beta$  と、 $a$  型の頂点に対するパターン  $\alpha$  に注目する。さらにこの辺に対するパターンを  $E$  とする。これはこの  $\alpha$ 、 $\beta$  の接点どうしをつなぐために  $S$  に加えた要素の集合である。このときの局面を  $P$  とする。このとき  $P$  は次のような遷移を行う。  $P \vdash^* \tau_2 P_1 \vdash^* \epsilon P_2 \vdash^* \tau_3 P_3$

以上の消去をハミルトン閉路に使用されないすべての辺に対して行った後、さらに次のような遷移を行う。ただし、現在の局面を  $P$  とする。

- ・ある  $\beta$  上で  $\tau = t_5$  のとき、そのパターン  $\beta$  について、 $P \vdash^* \tau_4 P_1$  とする。
- ・ある  $\alpha$  上で  $\tau = t_1$  のとき、そのパターン  $\alpha$  について、 $P \vdash^* \tau_2 P_1$  とする。
- ・ $\tau = t_0$  または  $\tau = t_4$  が成立し、さらに、この接点と、他の頂点に対するパターンの接点  $t_1$  または  $t_5$  をつないでいる辺に対するパターン  $E$  が存在したときは、この  $E$  について、 $P \vdash^* \epsilon P_1$  と遷移する。

上の3つがいずれも成立しないときは遷移は終了し、新たな局面  $P_1$  が得られたらこれを  $P$  とおいて上の遷移を繰り返す。トークンの個数は有限であるから、上の遷移は明らかに停止する。

グラフにハミルトン閉路が存在したとする。このとき、すべての頂点に閉路に使用されない辺が存在するので、はじめの消去で、すべての頂点に対するパターンは  $\alpha_1$ 、 $\beta_1$  のどちらかになっている。したがって、ある接点  $t_5$  におかれたトークン  $\tau$  が上のような消去を行ったとき、 $\tau$  が閉路に沿って頂点に対するパターンを順に消去すること、さらにこの消去が、 $\tau$  がはじめにおかれていた  $\{t\}$  に戻ってきたところで終了することは明らか。この  $\tau$  による消去はハミルトン閉路に沿って行われるので、すべてのパターンがこれによって消去される。したがって、消去が終了したとき、盤面上に残っているトークンは  $\tau$  だけである。すなわち、この  $H_i - Q$  は解をもつ。 ■

<補題 4. 2> 次のような  $H_i - Q$ 、 $H_i = (X, Y, B, S_i, T_i)$  を考える。ただし、 $0 \leq i \leq 15$  で、各  $T_i$  は、すべての  $T_i$  が異なるように適当に定める。

$$X = Y = \{1, 2, \dots, 15\}, \quad B = X \times Y,$$

$$0 \leq i \leq 7 \text{ のときは } T_i = 2^{\{t_0, t_1, t_2\}}, \quad S_i = \alpha + \{t_0, t_1, t_2\} - T_i$$

$$8 \leq i \leq 15 \text{ のときは } T_i = 2^{\{t_3, t_4, t_5\}}, \quad S_i = \beta + \{t_3, t_4, t_5\} - T_i$$

このとき、 $T_i = \{t_0, t_2\}$  または  $T_i = \{t_4\}$  のときに限り、 $H_i$  は解を持つ。(対称な解  $\{t_0, t_1\}$ ,  $\{t_3\}$  はここでは無視する。)

(証明) <図 4. 6> は一方通行のパターン  $E$  である。つまり、 $E + \{t_1\} \vdash^* \epsilon \{t$

$r\}$  であるが、 $E + \{t_r\} \vdash^* E \{t_1\}$  ではない。

このことから、 $H_i$  が解を持つとき、 $1 \leq i \leq 8$  のときは  $t_0 \equiv T_i$ 、 $9 \leq i \leq 16$  のときは  $t_5 \equiv T_i$  は明らかである。また、明らかに  $T_i \neq \emptyset$  である。

パターン  $\beta$  については着手可能な手が限られているので、補題の成立は明らか。パターン  $\alpha$  について考える。ここで、最終的には次の3つの遷移が存在しないことを示せばよい。

$$\alpha + \{t_1\} + \{t_2\} \vdash^* \{t_0\}$$

$$\alpha + \{t_1\} \vdash^* \{t_0\} + \{t_2\}$$

$$\alpha \vdash^* \{t_0\} + \{t_1\} + \{t_2\}$$

この3つの遷移が存在しないことは、コンピュータを用いて、実際に遷移可能な局面をすべて出力することによって確認した。したがって、補題が成立する。 ■

<補題 4. 3> 与えられたグラフから構成した  $H_i - Q$  について、ある頂点に対するパターンが消去されたとする。このとき <補題 4. 2> より、a 型の頂点に対しては  $\alpha + \{t_1\} \vdash^* \{t_0, t_2\}$ 、b 型の頂点に対しては  $\beta + \{t_3, t_5\} \vdash^* \{t_4\}$  という遷移によって消去が行われたとしてよい。このとき、消去の直前のパターンで  $t_1$  が  $\tau$  の時は消去後は  $t_0$  が  $\tau$  となり、直前に  $t_3$  または  $t_5$  が  $\tau$  の時は消去後は  $t_4$  が  $\tau$  となる。

(証明) b 型の頂点に対しては明らか。a 型の頂点に対しては、次のような遷移が存在しないことを示せばよい。

$$\alpha \vdash^* \alpha_1, \alpha_1 - \{t_0\} + \{t_1\} \vdash^* \{t_2\}, t_0 \equiv \alpha_1, t_1 \neq \alpha_1, t_2 \neq \alpha_1$$

このような遷移が存在しないことは <補題 4. 2> と同様に、実際にコンピュータを用いて確認した。 ■

<定理 4. 1> 与えられたグラフに対して、 $H_i - Q$  を構成する。このとき、与えられたグラフがハミルトン閉路を持つ必要十分条件は、構成した  $H_i - Q$  が解をもつことである。

(証明) <補題 4. 1> より、 $H_i - Q$  が解を持つときにグラフがハミルトン閉路を持つことを示せばよい。ある b 型の頂点に対するパターン  $\beta$  が消去されたとする。このとき、<補題 4. 2> より、これは次のような遷移によるものであるとしてよい。

$$\beta + \{t_3, t_5\} \vdash^* \{t_4\}$$

したがって、 $\beta$  が消去される前に、 $t_5$  にトークンが存在しなくてはならない。この  $t_5$  に隣接した辺に対するパターンを  $E$  とすると、次が成立するような局面  $P$ 、 $Q$  および接点  $t_x$  が存在する。

$$S \vdash^* P \vdash^* EQ, t_3, t_5 \equiv Q, t_4 \neq Q, P - E - \{t_x\} + \{t_5\} = Q$$

ここで、すべての頂点に対するパターンが消去されることと <補題 4. 3> より、局面  $Q$  は、 $t_x$  が  $\tau$  または  $t_2$  であるような局面であるとしてよい。

ここで  $t_x = t_2$  とする。ところがここで、もとのグラフにもどって考えると、接点  $t_2$ 、 $t_5$  はともに頂点に入る辺なので、これらが辺に対するパターンでつながっているの

は構成に矛盾する。したがって、局面Pにおいて  $t_x = \tau$  であり、局面Qにおいて  $t_5 = \tau$  である。

同様の議論により、あるa型の頂点に対するパターン $\alpha$ が  $\alpha + \{t_1\} \vdash^* \{t_0, t_2\}$  という遷移によって消去されるとき、 $\alpha$ が消去される直前の局面Pにおいて、 $t_1 = \tau$  であることが確認できる。

仮定より、すべての頂点に対するパターンは消去される。したがってトークン $\tau$ はすべての頂点に対するパターンを正確に1度ずつ訪問する。したがって、 $H \vdash Q$ 上でトークン $\tau$ が訪問するパターンの順番と同じように、元のグラフ上で頂点を訪問する道を構成すれば、これはハミルトン路を与える。

$\tau$ が最終的にはじめの位置に戻って来て遷移が終了することは明らかであろう。 ■

#### 謝辞

有益なご意見をいただいた笠井琢美助教授、戸田誠之助助手に深謝します。

#### 参考文献

- [1] Horowitz, E. and Sahni, S., "FUNDAMENTALS OF COMPUTER ALGORITHMS", Computer Science Press, Inc., 1978.
- [2] Garey, M. R. and Johnson, D. S., "COMPUTERS AND INTRACTABILITY A Guide to the Theory of NP-Completeness", W. H. FREEMAN AND COMPANY, 1979.